

Variable Compleja I

Examen X

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Variable Compleja I

Examen X

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://github.com/losdeldgiim)

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Variable Compleja I.

Curso Académico 2024-25.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Javier Merí de la Maza.

Descripción Prueba Intermedia.

Fecha 29 de Abril de 2025.

Duración 120 minutos.

Ejercicio 1 (3.5 puntos). Probar que la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^z}$ converge absolutamente en todo punto del dominio $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$ y uniformemente en cada subconjunto compacto contenido en Ω .

- [1 punto extra] Deducir que la función $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $g(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^z}$ es continua y probar que admite primitiva.

Ejercicio 2.

1. [1.5 puntos] Probar que la función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es entera:

$$f(0) = 1 \quad \text{y} \quad f(z) = \frac{e^z - 1}{z} \quad \forall z \in \mathbb{C}^*.$$

2. [1.5 puntos] Calcular la integral

$$\int_{C(0,2)} \frac{e^z - 1}{z(z-1)^2} dz.$$

Ejercicio 3 (3.5 puntos). Dada $g \in \mathcal{H}(D(0, 1))$, probar que existe una única función $f \in \mathcal{H}(D(0, 1))$ verificando

$$z^2 f''(z) + f(z) = g(z), \quad \forall z \in D(0, 1),$$

Ejercicio 1 (3.5 puntos). Probar que la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^z}$ converge absolutamente en todo punto del dominio $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$ y uniformemente en cada subconjunto compacto contenido en Ω .

Estudiamos en primer lugar la convergencia uniforme. Sea $K \subset \Omega$ compacto. Como la parte real de z es continua, $\exists M \in \mathbb{R}$ tal que:

$$M = \min\{\operatorname{Re} z : z \in K\} > 1$$

Entonces, para todo $z \in K$ se tiene que:

$$\left| \frac{1}{n^z} \right| = \frac{1}{n^{\operatorname{Re} z}} \leq \frac{1}{n^M} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $M > 1$, la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^M}$ converge, y por el Test de Weierstrass, la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^z}$ converge uniformemente en K .

Para la convergencia absoluta, consideramos $z \in \Omega$ fijo. Como $\{z\}$ es compacto, por el Test de Weierstrass tenemos que converge absolutamente en $\{z\}$. Como z es arbitrario, tenemos que la serie converge absolutamente en todo punto de Ω .

- **[1 punto extra]** Deducir que la función $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $g(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^z}$ es continua y probar que admite primitiva.

Probaremos ahora la continuidad de g en Ω , algo que no tenemos directo por no ser Ω compacto. Fijado $z \in \Omega$, por ser Ω abierto $\exists R \in \mathbb{R}^+$ tal que $D(z, R) \subset \Omega$. Entonces, tomando $r = R/2$ se tiene que $z \in \overline{D}(z, r) \subset \Omega$, con $K = \overline{D}(z, r)$ compacto. Como K es compacto y el término general de la serie de g está formado por funciones continuas para todo $n \in \mathbb{N}$, la convergencia uniforme de la serie en K nos garantiza que g es continua en $z \in K$. Como z era arbitrario en Ω , se concluye que g es continua en Ω .

Para probar que admite primitiva, como Ω es estrellado podríamos intentar ver si g es holomorfa en Ω , algo que no es trivial puesto que no se trata de una serie de potencias. Por tanto, veamos que la integral para todo camino γ en Ω es nula. Fijado un camino cerrado γ , como γ es una función continua sabemos que γ^* es compacto, por lo que la serie converge uniformemente en γ^* . Por tanto, podemos intercambiar la integral y la suma:

$$\int_{\gamma} g(z) dz = \int_{\gamma} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^z} dz = \sum_{n \geq 1} \int_{\gamma} \frac{1}{n^z} dz \stackrel{(*)}{=} \sum_{n \geq 1} 0 = 0$$

donde en (*) hemos usado el Teorema Local de Cauchy, puesto que el integrando es holomorfa.

Por tanto, g es continua y admite primitiva en Ω .

Ejercicio 2.

1. [1.5 puntos] Probar que la función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es entera:

$$f(0) = 1 \quad \text{y} \quad f(z) = \frac{e^z - 1}{z} \quad \forall z \in \mathbb{C}^*.$$

Por el Carácter local de la Holomorfía, sabemos que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$. Por tanto, también sabemos que $f \in C(\mathbb{C}^*)$. Estudiar la derivabilidad en el origen no es sencillo, y planteamos varias opciones.

Opción 1. Estudiemos en primer lugar la continuidad de f en el origen. Sabemos que:

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - e^0}{z - 0} \stackrel{(*)}{=} e^0 = 1 = f(0)$$

donde en (*) hemos usado la definición formal de la derivada de la exponencial en el origen.

Por tanto, sabemos que $f \in C(\mathbb{C})$ y $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$. Por el corolario del Teorema de Extensión de Riemman, sabemos que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Opción 2. Supongamos que no caemos en la primera opción, que evidentemente es mucho más directa. Entonces, buscamos calcular el siguiente límite:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1 - z}{z^2}$$

Desarrollando la exponencial en serie de Taylor, tenemos que:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1 - z}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - 1 - z}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n!}}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^{n-2}}{n!} = \lim_{z \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+2)!}$$

Para poder intercambiar sumatoria con límite, necesitamos que la sumatoria sea una función continua, y para ello necesitamos que haya convergencia uniforme. Calculamos el radio de convergencia de la serie de potencias:

$$\left\{ \frac{1}{(n+3)!} \cdot \frac{(n+2)!}{1} \right\} = \left\{ \frac{1}{n+3} \right\} \rightarrow 0$$

Por la fórmula de Cauchy-Hadamard, el radio de convergencia es $R = \infty$. Por tanto, la serie converge uniformemente en todo compacto de \mathbb{C} . Tomando $K = \overline{D}(0, r)$ para cierto $r \in \mathbb{R}^+$, tenemos que:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1 - z}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^n}{(n+2)!} = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$$

Por tanto, f es derivable en el origen (con $f'(0) = 1/2$), y por tanto $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

2. [1.5 puntos] Calcular la integral

$$\int_{C(0,2)} \frac{e^z - 1}{z(z-1)^2} dz.$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{z(z-1)^2} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{(z-1)^2} = \frac{A(z-1)^2 + Bz(z-1) + Cz}{z(z-1)^2}$$

- Si $z = 0$, tenemos $1 = A$.
- Si $z = 1$, tenemos $1 = C$.
- Igualando los coeficientes de z^2 , tenemos $0 = A + B$, por lo que $B = -1$.

Por tanto, tenemos que:

$$\int_{C(0,2)} \frac{e^z - 1}{z(z-1)^2} dz = \int_{C(0,2)} \frac{e^z - 1}{z} dz - \int_{C(0,2)} \frac{e^z - 1}{z-1} dz + \int_{C(0,2)} \frac{e^z - 1}{(z-1)^2} dz$$

Definimos la siguiente función:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto e^z - 1 \end{aligned}$$

Sabemos que f es entera, y usando la fórmula de Cauchy para las derivadas, tenemos que:

$$\int_{C(0,2)} \frac{f(z)}{z} dz = 2\pi i f(0) - 2\pi i f(1) + 2\pi i f'(1) = 2\pi i (0 - (e-1) + e) = 2\pi i$$

Ejercicio 3 (3.5 puntos). Dada $g \in \mathcal{H}(D(0,1))$, probar que existe una única función $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ verificando

$$z^2 f''(z) + f(z) = g(z), \quad \forall z \in D(0,1),$$

Como $g \in \mathcal{H}(D(0,1))$, existe una sucesión $\{\alpha_n\}$ tal que:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n \quad \forall z \in D(0,1)$$

Supongamos ahora la existencia de una función entera f que verifique la ecuación dada. Entonces, existe una sucesión $\{\beta_n\}$ tal que:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^n \quad \forall z \in D(0,1)$$

Por el Teorema de Holomorfa de funciones dadas como suma de serie de potencias, tenemos que:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\beta_n z^{n-1} \quad \forall z \in D(0,1)$$

De nuevo, por el mismo Teorema:

$$f'(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\beta_n z^{n-2} \quad \forall z \in D(0,1)$$

Podemos por tanto escribir la ecuación dada como:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n &= z^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\beta_n z^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\beta_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\beta_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n(n-1) + 1)\beta_n z^n \quad \forall z \in D(0,1) \end{aligned}$$

Por el Principio de Identidad, se tiene que:

$$\alpha_n = (n(n-1) + 1)\beta_n \implies \beta_n = \frac{\alpha_n}{n(n-1) + 1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Por tanto, se tiene que:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n(n-1) + 1} z^n \quad \forall z \in D(0,1)$$

Comprobemos que dicha función es holomorfa en $D(0,1)$. Como $g \in \mathcal{H}(D(0,1))$, entonces su radio de convergencia es $R_g = 1$, por lo que $\{\sqrt[n]{|\alpha_n|}\} \rightarrow 1$. Por tanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{\alpha_n}{n(n-1) + 1} \right|} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n(n-1) + 1}} = \frac{1}{1} = 1$$

Por tanto, $R_f = 1$ y por tanto $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$, demostrando así la existencia de una función entera f que verifique la ecuación dada. Además, esta es única por el Principio de Identidad.